WS 07/08

zu Aufgabe 9

1. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Da jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{1}$.

2. (a) Sei $U = \mathbb{N}$ das Universum.

   (b) Seien $\mathfrak{I}(P) = \mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{I}(Q) = \mathbf{Q} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{P}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen, und $\mathbf{Q}$ ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, die ≥ 3 sind. Da 1 weder in $\mathbf{P}$ noch in $\mathbf{Q}$ liegt, ist $\mathfrak{I}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \mathbf{0}$.

Nachklausur 07/08

zu Aufgabe 9

Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)) & \approx & \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg C \vee D) & \text{De Morgan} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg C \vee D) & \text{De Morgan} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg C \wedge \neg D) & \text{De Morgan} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) & \text{Negationsregel.} \end{array}$$

Dann ist $(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D)$ eine Negationsnormalform der Formel $\neg((A \vee B) \wedge (\neg C \vee D))$.

WS 08/09

Aufgabe 9

Sei $U = \mathbb{Z}$ das Universum bei folgenden Interpretationen.

1. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $P(x, y)$ die Aussage $x = y$. Dann ist die Formel $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x)$ wahr, das heißt, es gibt eine Interpretation, für die α wahr ist. Somit ist α nicht widerspruchsvoll.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $P(x, y)$ die Aussage $x < y$. Dann ist die Formel $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x)$ falsch, das heißt, es gibt eine Interpretation, für die α falsch ist. Somit ist α nicht tautologisch.

SS 09

q: Q ist schuldig.

r: R ist schuldig.

Die Vorermittlungen der Kommissarin ergeben damit:

1. $q \vee r \to \neg p$
2. $\neg p \vee \neg r \to q$
3. $r \to p$

Diese Aussagen müssen wir mit $\wedge$ verknüpfen und überprüfen, unter welchen Voraussetzungen an p, q und r sie sich als wahr herausstellt.

Wir berechnen die Wahrheitstafel für $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$, wobei wir diese allerdings nur so weit ausfüllen, bis klar ist, was der Wahrheitswert von $(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$ ist.

p	q	r	$q \vee r \to \neg p$	$\neg p \vee \neg r \to q$	$r \to p$	$(q \vee r \to \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r \to q) \wedge (r \to p)$
1	**1**	**1**	**0**			**0**
1	**0**	**1**	**0**			**0**
1	**1**	**0**	**0**			**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**		**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**		**0**

Damit ist der Fall eindeutig gelöst: Q ist schuldig und P und R sind unschuldig. Andere Möglichkeiten kann es nicht geben.

WS 09/10

Aufgabe 7

Gegeben sind Atome A, B, C, D. Als Prämissen sind

1. $A \to C \vee \neg D$
2. $B \vee C \to D$
3. $A \wedge B$

gegeben, aus denen mittels eines formalen Beweises nachgewiesen wird, dass dann C gilt:

1.	$A \to C \vee \neg D$	Prämisse
2.	$B \vee C \to D$	Prämisse
3.	$A \wedge B$	Prämisse
4.	B	3., Vereinfachung
5.	$B \vee C$	4., Ausdehnung
6.	D	5., 2., Modus ponens
7.	A	3., Vereinfachung
8.	$C \vee \neg D$	7., 1., Modus ponens
9.	$\neg D \vee C$	8., Kommutativgesetz
10.	$D \to C$	9., Implikation
11.	C	6., 10., Modus ponens

Damit ist gezeigt, dass unter den genannten Prämissen die Aussage C gilt.

SS 10

Aufgabe 8

Seien A, B Atome und $\alpha = A \to B$, $\beta = \neg A \to \neg B$, $\gamma = \neg(A \wedge B)$ damit gebildete Formeln.

1. Für die Konjunktion der Formeln α, β und γ gilt:

$$
\begin{array}{lll}
 & \alpha \wedge \beta \wedge \gamma & \text{Konjunktion der Formeln} \\
\approx & (A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{Implikationen ersetzen} \\
\approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg(\neg A) \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{Doppelte Negation} \\
\approx & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge B) & \text{De Morgan} \\
\approx & (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) & \text{Konjunkive Normalform,} \\
 & & \text{Distributivgesetz} \\
\approx & (\neg A \vee B) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee \neg B) & \text{Äquivalenzen A1 und A2} \\
\approx & (\neg A \vee B) \wedge \neg B & \text{Distributivgesetz} \\
\approx & (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) & \text{Äquivalenzen A1 und A2} \\
\approx & \neg A \wedge \neg B & \text{Negationsnormalform}
\end{array}
$$

   mit den beiden Äquivalenzen A1 und A2, die für jede Formel σ gelten:

   A1 $\sigma \wedge \neg\sigma \approx \mathbf{0}$,

   A2 $\sigma \vee \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \vee \sigma \approx \sigma$.

2. Sei $\mathfrak{I}$ eine Bewertung der Formeln, welche mit den Atomen A und B gebildet werden können. Wenn gemäß der Voraussetzung $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta) = \mathfrak{I}(\gamma) = 1$ ist, gilt aufgrund der gezeigten Äquivalenz $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \approx \neg A \wedge \neg B$, dass $\mathfrak{I}(\neg A \wedge \neg B) = \mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) = 1$ ist. Da einer Konjunktion von Formeln nur dann der Wert 1 zugeordnet wird, wenn allen Formeln der Wert 1 zugeordnet ist, folgt $\mathfrak{I}(\neg A) = \mathfrak{I}(\neg B) = 1$. Mit der Definition für die Negation ergibt sich $\mathfrak{I}(A) = 0$ und $\mathfrak{I}(B) = 0$.

WS 10/11

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine disjunktive Normalform mit möglichst wenig Konjunktionen überführt; hierzu werden auch die vereinbarten Äquivalenzen $\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}$ (V1) und $\beta \wedge \mathbf{1} \approx \beta$ (V2) für Formeln

α und β verwendet (siehe Vereinbarung 20.1.29 in der Kurseinheit 7):

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine pränexe Normalform überführt:

	$\neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists y Q(y,c))$	Umbenennung
$\approx$	$\neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists z Q(z,c))$	Implikation
$\approx$	$\neg\exists x(\neg(\forall y P(y,x)) \vee \exists z Q(z,c))$	Quantorwechsel
$\approx$	$\forall x \neg(\neg(\forall y P(y,x)) \vee \exists z Q(z,c))$	De Morgan
$\approx$	$\forall x(\neg\neg(\forall y P(y,x)) \wedge \neg\exists z Q(z,c))$	Doppelte Negation
$\approx$	$\forall x(\forall y P(y,x) \wedge \neg\exists z Q(z,c))$	Quantorwechsel
$\approx$	$\forall x(\forall y P(y,x) \wedge \forall z \neg Q(z,c))$	Negationsnormalform, Quantifizierung
$\approx$	$\forall x(\forall y(P(y,x) \wedge \forall z \neg Q(z,c)))$	Kommutativgesetz
$\approx$	$\forall x(\forall y(\forall z \neg Q(z,c) \wedge P(y,x)))$	Quantifizierung
$\approx$	$\forall x(\forall y(\forall z(\neg Q(z,c) \wedge P(y,x))))$	Klammern
$\approx$	$\forall x \forall y \forall z(\neg Q(z,c) \wedge P(y,x))$	pränexe Normalform

SS 11

Aufgabe 9

Die gegebene Formel wird mittels Äquivalenzumformungen in eine Negations- und diese dann in eine pränexe Normalform überführt:

$$\begin{array}{lll}
 & \neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists y Q(y,c)) & \text{Umbenennung} \\
\approx & \neg\exists x(\forall y P(y,x) \to \exists z Q(z,c)) & \text{Implikation} \\
\approx & \neg\exists x(\neg(\forall y P(y,x)) \lor \exists z Q(z,c)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \forall x\neg(\neg(\forall y P(y,x)) \lor \exists z Q(z,c)) & \text{De Morgan} \\
\approx & \forall x(\neg\neg(\forall y P(y,x)) \land \neg\exists z Q(z,c)) & \text{Doppelte Negation} \\
\approx & \forall x(\forall y P(y,x) \land \neg\exists z Q(z,c)) & \text{Quantorwechsel} \\
\approx & \forall x(\forall y P(y,x) \land \forall z\neg Q(z,c)) & \text{Negationsnormalform,} \\
 & & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \forall x(\forall y(P(y,x) \land \forall z\neg Q(z,c))) & \text{Kommutativgesetz} \\
\approx & \forall x(\forall y(\forall z\neg Q(z,c) \land P(y,x))) & \text{Quantifizierung} \\
\approx & \forall x(\forall y(\forall z(\neg Q(z,c) \land P(y,x)))) & \text{Klammern} \\
\approx & \forall x\forall y\forall z(\neg Q(z,c) \land P(y,x)) & \text{pränexe Normalform}
\end{array}$$

SS 12

Aufgabe 10

1. Seien $\alpha = (A \lor B) \to A$ und $\beta = B \to (A \land B)$. Eine Wahrheitstafel für α und β kann dann so aussehen:

A	B	$A \lor B$	α	$A \land B$	β
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

   Die vierte und sechste Spalte der Wahrheitstafel zeigen, dass α und β äquivalent sind.

2. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll}
\alpha & = & (A \lor B) \to A & \\
 & \approx & \neg(A \lor B) \lor A & \text{Junktor-Minimierung} \\
 & \approx & (\neg A \land \neg B) \lor A & \text{De Morgan} \\
 & \approx & (\neg A \lor A) \land (\neg B \lor A) & \text{Distributivgesetze} \\
 & \approx & (\neg B \lor A) & \neg A \lor A \approx 1 \text{ und } \alpha \land 1 \approx \alpha
\end{array}$$

   und

$$\begin{array}{rcll}
\beta & = & B \to (A \land B) & \\
 & \approx & \neg B \lor (A \land B) & \text{Junktor-Minimierung} \\
 & \approx & (\neg B \lor A) \land (\neg B \lor B) & \text{Distributivgesetze} \\
 & \approx & (\neg B \lor A) & \neg B \lor B \approx 1 \text{ und } \alpha \land 1 \approx \alpha
\end{array}$$

   Dies zeigt, dass α und β äquivalent sind.

SS 13

Aufgabe 8

(a) Die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ist erfüllbar, aber weder tautologisch noch widerspruchsvoll. Mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{0}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, und mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{1}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{0}$.

(b) Die Formel $\gamma = ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$ ist eine Tautologie. Für den zweiten Teil der Formel gilt nämlich

$$\begin{array}{rcll} A \to (B \to C) & \approx & \neg A \vee (B \to C) & \text{(Junktorminimierung)} \\ & \approx & \neg A \vee (\neg B \vee C) & \text{(Junktorminimierung)} \\ & \approx & (\neg A \vee \neg B) \vee C & \text{(Assoziativgesetze)} \\ & \approx & \neg(A \wedge B) \vee C & \text{(deMorgan)} \\ & \approx & (A \wedge B) \to C & \text{(Junktorminimierung rückwärts)} \end{array}$$

Damit stehen in γ links und rechts von der Äquivalenz äquivalente Formeln, γ ist also immer erfüllt und damit eine Tautologie (was man natürlich auch mit einer Wahrheitstafel zeigen kann).

WS 13/14

Aufgabe 8

Aus der Wahrheitstafel folgt unmittelbar (durch „Aufzählung der Einsen“) die DNF

$$\alpha \approx (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Diese können wir weiter umformen zu

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge (B \wedge C))) & \text{Klammern setzen} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((\neg A \vee A) \wedge (B \wedge C)) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee ((B \wedge C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\ & \approx & (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist ebenfalls eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α, mit nur noch zwei Monomen.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee C) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) & \\ & & \wedge((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee C)) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge ((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) & \neg A \vee A \approx 1 \text{ und } 1 \wedge \beta \approx \beta \\ & \approx & (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

SS 14

Aufgabe 8

1. (a)
$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(L(x,y) \wedge \neg(\exists z(M(z) \wedge V(z,y)))))$$
   (b)
$$(\forall x(P(x) \rightarrow \exists y L(x,y))) \rightarrow (\neg(\exists z(M(z) \wedge \forall v(P(v) \rightarrow V(z,v)))))$$
2. Es gibt eine Lösung, die eine Lösung für alle Probleme ist.

WS 14/15

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & ((B \vee \neg C) \wedge \neg D) \rightarrow \neg A & \\ & \approx & \neg A \vee \neg((B \vee \neg C) \wedge \neg D) & \text{Junktorminimierung} \\ & \approx & \neg A \vee (\neg(B \vee \neg C) \vee D) & \text{de Morgan, Negationsregel} \\ & \approx & \neg A \vee ((\neg B \wedge C) \vee D) & \text{de Morgan} \\ & \approx & \neg A \vee (\neg B \wedge C) \vee D & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & (\neg A \vee (\neg B \wedge C)) \vee D & \text{Klammern} \\ \alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee D & \text{Distributivgesetz} \\ \alpha & \approx & ((\neg A \vee \neg B) \vee D) \wedge ((\neg A \vee C) \vee D) & \text{Distributivgesetz} \\ \alpha & \approx & (\neg A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee C \vee D) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

SS 15

Aufgabe 7

1. In der Formel $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$ ist x gebunden und y frei.
2. In der Formel $\forall x P(x) \rightarrow Q(x,y)$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ sind x und y frei.
3. In der Formel $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$ ist x in $P(x)$ gebunden. In $Q(x,y)$ ist x gebunden und y frei.
4. In der Formel $Q(x,y) \rightarrow \exists y P(x)$ sind alle Variablensymbole frei.

WS 15/16

Aufgabe 8

a) Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & (A \to B) \vee (C \to (B \wedge D)) & \\ & \approx & (\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee (B \wedge D)) & \text{Junktorminimierung} \\ & \approx & \neg A \vee B \vee \neg C \vee (B \wedge D) & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist bereits eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aus dieser letzten Form erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & (\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (B \wedge D) & \text{Klammern} \\ & \approx & ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee B) \wedge ((\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) & \text{Klammern weglassen} \\ & \approx & (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) & \text{Kommutativgesetz, Idempotenz .} \end{array}$$

Das ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

b) Die Wahrheitstafel ergibt

β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$
0	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Der Vergleich der ersten und letzten Spalte zeigt, dass β und $\beta \wedge (\beta \vee \gamma)$ äquivalent sind.

c) Die KNF, die wir in Teil a) für α gefunden haben, hat (wenn wir wieder entsprechend klammern) die Form

$$\alpha \approx \beta \wedge (\beta \vee \gamma)$$

mit $\beta = \neg A \vee B \vee \neg C\,,\ \gamma = D$. Nach Teil b) gilt damit

$$\alpha \approx \beta = \neg A \vee B \vee \neg C$$

– und das ist als einzelne Klausel gleichzeitig DNF und KNF. Insbesondere ist α von D unabhängig.

SS 16

Aufgabe 8

Wir formen beide Formeln so lange mit Hilfe der Äquivalenzregeln um, bis die Negationszeichen direkt vor den Atomen bzw. Primformeln stehen.

(a)

$$\begin{aligned}\neg((A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) &\approx \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg C) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

(b)

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \exists y(R(x,y) \wedge (\neg Q(y)))) &\approx \exists x(\neg(\exists y(R(x,y) \wedge (\neg Q(y))))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x \forall y(\neg(R(x,y) \wedge (\neg Q(y)))) && \text{(Quantorwechsel)}\\ &\approx \exists x \forall y(\neg R(x,y) \vee \neg\neg Q(y)) && \text{(De Morgan)}\\ &\approx \exists x \forall y(\neg R(x,y) \vee Q(y)) && \text{(Negationsregel)},\end{aligned}$$

und diese Formel ist in Negationsnormalform.

WS 16/17

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll}\alpha &=& (D \vee (B \wedge \neg C)) \to A & \\ &\approx& A \vee \neg(D \vee (B \wedge \neg C)) & \text{Junktorminimierung}\\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge \neg(B \wedge \neg C)) & \text{de Morgan}\\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee \neg\neg C)) & \text{de Morgan}\\ &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \text{doppelte Verneinung}\\ &\approx& (A \vee \neg D) \wedge (A \vee (\neg B \vee C)) & \text{Distributivgesetz}\\ &\approx& (A \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg B \vee C) & \text{Klammern weglassen .}\end{array}$$

Dies ist eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform von α.

Wenn wir oben in der 5. Zeile wieder einsteigen, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll}\alpha &\approx& A \vee (\neg D \wedge (\neg B \vee C)) & \\ \alpha &\approx& A \vee ((\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C)) & \text{Distributivgesetz}\\ \alpha &\approx& A \vee (\neg D \wedge \neg B) \vee (\neg D \wedge C) & \text{Klammern weglassen}\\ . & & & \end{array}$$

Das ist eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Aufgabe 8

(a) Als Wahrheitstafel für die Formel $\alpha = ((P \to Q) \land (R \lor Q)) \to (P \land Q)$ erhalten wir:

P	Q	R	$P \to Q$	$R \lor Q$	$(P \to Q) \land (R \lor Q)$	$P \land Q$	α
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Wir sehen, dass die Formel erfüllbar ist, denn es gibt eine Bewertung der Atome (z.B. $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(Q) = \mathfrak{I}(R) = \mathbf{0}$), so dass die Bewertung der Formel $\mathbf{1}$ ist.

(b) Wir beginnen mit der ersten Formel und versuchen, sie mit Hilfe der Äquivalenzregeln in die zweite zu überführen.

$$\begin{aligned}
(P \land ((Q \land R) \lor (Q \land \neg R))) \lor (R \land Q) &\approx (P \land (Q \land (R \lor \neg R))) \lor (R \land Q) \\
&\quad \text{(Distributivgesetze)} \\
&\approx (P \land (Q \land \mathbf{1})) \lor (R \land Q) \\
&\quad (\alpha \lor \neg\alpha \approx \mathbf{1}) \\
&\approx (P \land Q) \lor (R \land Q) \\
&\quad (\alpha \land 1 \approx \alpha) \\
&\approx (P \lor R) \land Q \\
&\quad \text{(Distributivgesetze).}
\end{aligned}$$

Also sind die beiden Formeln logisch äquivalent.

SS 18

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für die Formel sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$B \wedge \neg C$	$A \to (B \wedge \neg C)$	$\neg A \vee C$	$\neg B \to (\neg A \vee C)$	α
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Da die Formel α für jede Bewertung der Atome die Bewertung **1** besitzt, ist es eine Tautologie.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(A \to (B \wedge \neg C)) \to (\neg B \to (\neg A \vee C)) &\approx (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \to (B \vee (\neg A \vee C))(\text{ Junktorminimierun} \\
&\approx \neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (Junktorminimieru} \\
&\approx (A \wedge \neg(B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)} \\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)} \\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee B \vee \neg A \vee C \text{ (Klammern)}
\end{aligned}$$

Die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\alpha &= (A \to B) \vee (C \to (A \wedge B)) \\
&\approx (B \vee \neg A) \vee ((A \wedge B) \vee \neg C) && \text{Junktorminimierung} \\
&\approx B \vee \neg A \vee (A \wedge B) \vee \neg C && \text{Klammern weglassen .}
\end{aligned}$$

Dies ist schon eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Wenn wir darauf das Kommutativgesetz anwenden und erneut Klammern setzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A \vee \neg C) \\
&\approx (A \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) \wedge (B \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) && \text{Distributivgesetz} \\
&\approx (A \vee B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) && \text{Klammern weglassen ;}
\end{aligned}$$

Das ist bereits eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform; sie kann deutlich „verschönert“ werden durch

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx \mathbf{1} \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) && (A \vee \neg A = \mathbf{1}, \mathbf{1} \vee \beta = \mathbf{1}) \\
&\approx (B \vee \neg A \vee \neg C) && \mathbf{1} \wedge \beta = \beta, \text{Idempotenz .}
\end{aligned}$$

Das ist eine einzelne Klausel, also ebenfalls eine konjunktive Normalform von α (und gleichzeitig ebenfalls eine disjunktive Normalform!).

SS 19

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für α sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$A \to B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \to B) \wedge (B \leftrightarrow C)$	$A \wedge B$	α
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Also ist α erfüllbar, aber nicht tautologisch, und nicht widerspruchsvoll.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha &\approx ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \to (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung, Klammern)} \\
&\approx \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(Junktorminimierung)} \\
&\approx \neg(((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{Klammern} \\
&\approx (\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\approx (\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg(B \vee \neg C)) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan,Klammern)} \\
&\approx (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge B) \quad \text{(DeMorgan, Klammern).}
\end{aligned}$$

Dies ist eine disjunktive Normalform für α.